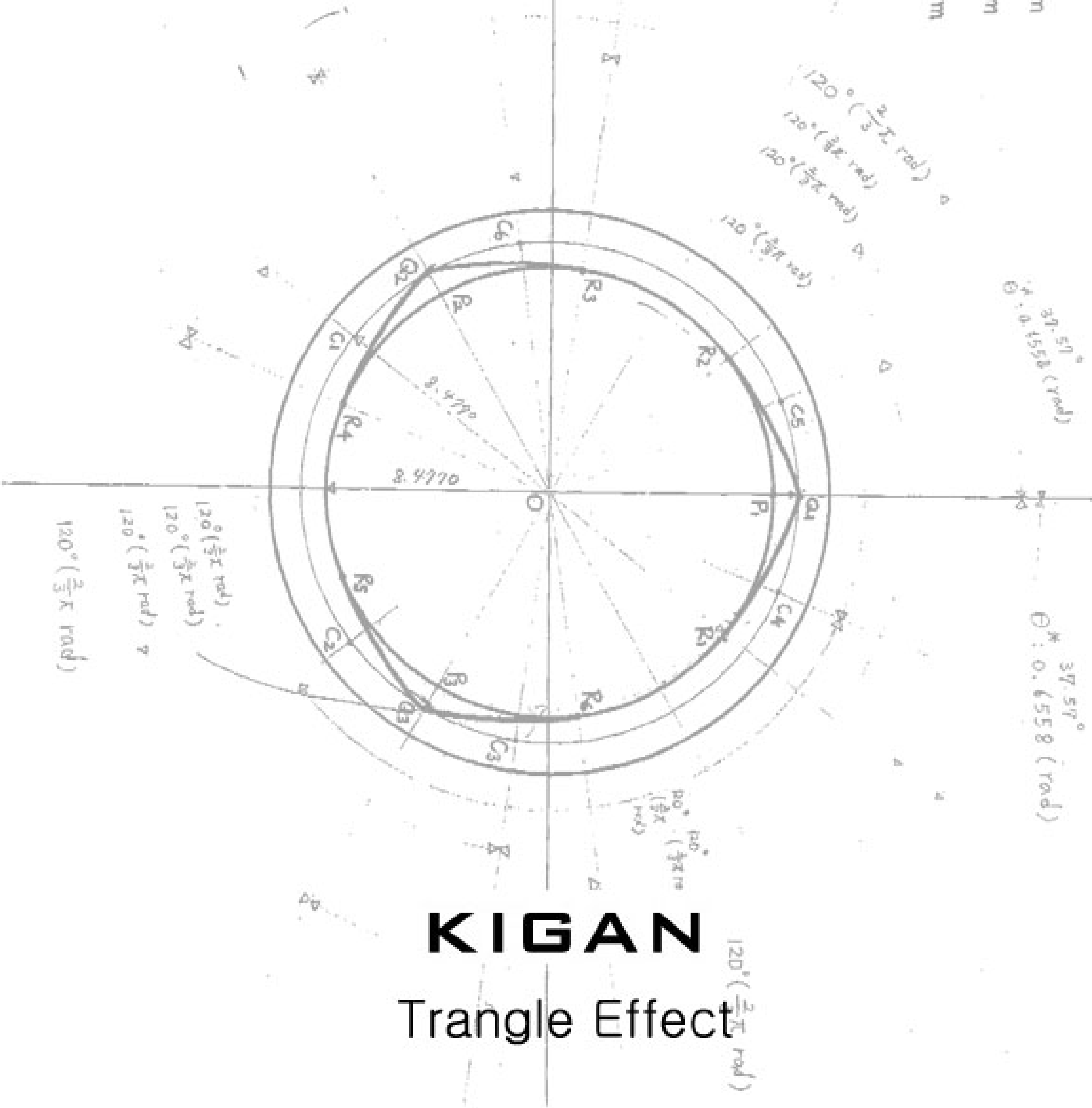
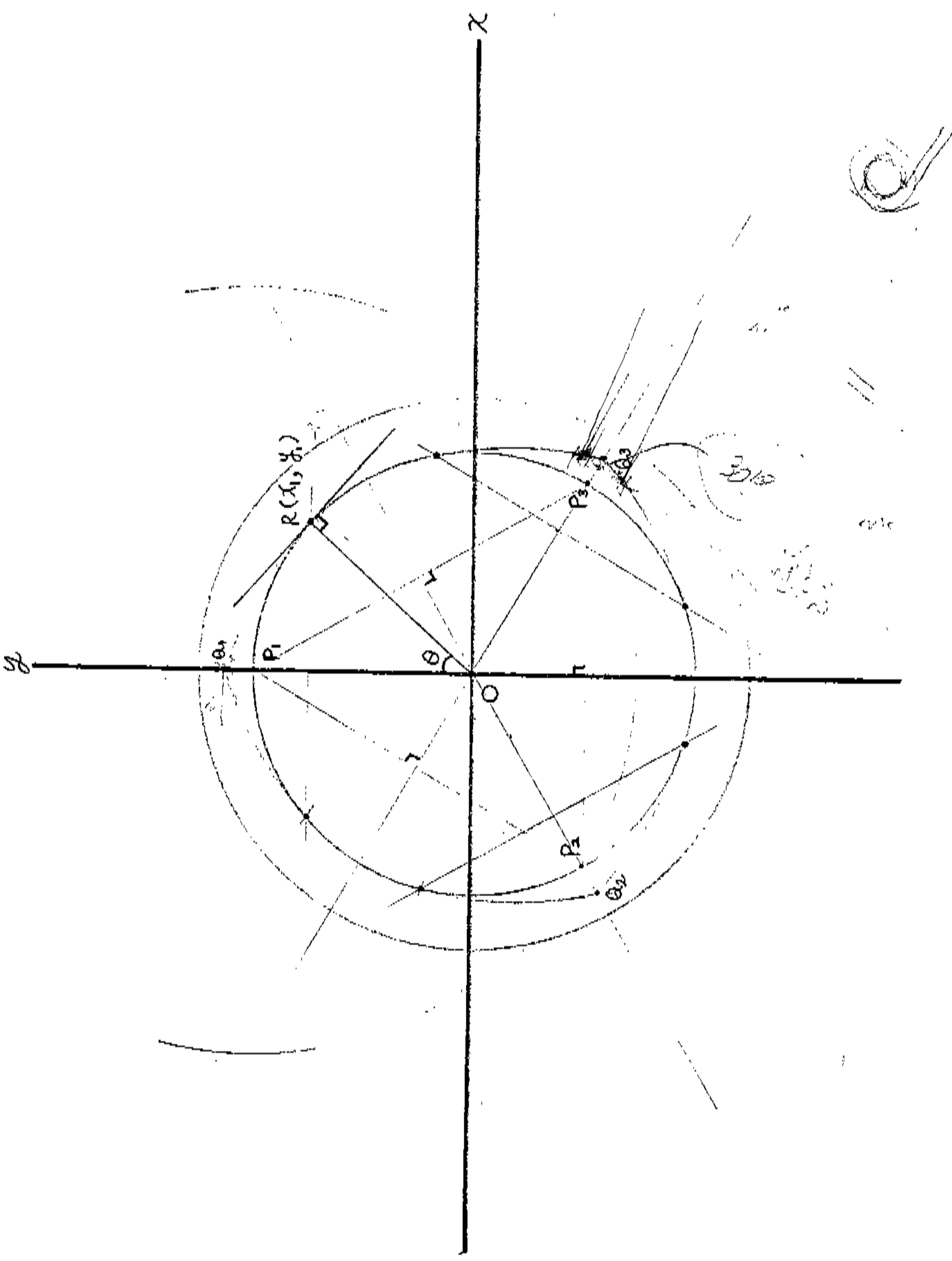


KIGAN

Trangle Effect

- Dong-hwa Jung, Ph.D.
  R&D Center / Kigan Industry Group Co.,LTd.

- Sangwoong Choi, Ph.D.
  Professor / Kyungpook National University


x
y
R(x1, y1)
P1
P2
P3
Q1
Q2
Q3
θ
O
r

Ⅰ.

① 내경이 r인 원을 작도.

② 원 ①의 원주상의 임의의 한 점 P_1을 중심으로 내경이 $\sqrt{3}r$인 원을 작도하여

원 ①과 만나는 두 점을 P_2 , P_3 .

$\therefore \triangle P_1P_2P_3$는 한 변의 길이가 $\sqrt{3}r$인 정삼각형.

$$\therefore \angle P_1OP_2 = \angle P_2OP_3 = \angle P_3OP_1 = \frac{2\pi}{3}$$

③ 점 P_1 , P_2 , P_3로부터 거리가 l인 점 Q_1 , Q_2 , Q_3를 설정.

곡선부분을 나타내는 식은 좌우대칭이며, 내경이 r인 원과 접해야 한다. 그리고 물리적으로 이 부분은 어떤 물체가 구심력($\frac{mv^2}{r}$)을 상실한 시점부터 일정시간동안 운동방향의 궤적으로 간주해도 무방하다. 이러한 성질을 만족시키는 2차곡선은 포물선이다. 따라서 점 Q_1 , Q_2 , Q_3는 합동인 세 포물선의 꼭지점이 된다.

Q_1이 꼭지점인 포물선을 원점을 중심으로 120도, 240도 회전이동한 것이

Q_2 , Q_3가 꼭지점인 포물선.

Ⅱ.

① 접점 : $R(x_1 , y_1)$, 원 : $x^2 + y^2 = r^2$, 포물선 : $y = ax^2 + r + l$.

접선의 기울기는 각각 $\frac{dy}{dx} = 2ax$, $\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}$.

따라서 아래의 식들이 성립해야 한다.

$$2a = -\frac{1}{y_1} \ , \ {x_1}^2 + {y_1}^2 = r^2 \ , \ y_1 = a\,{x_1}^2 + r + l$$

위의 식들을 풀면,

$$x_1 = \sqrt{2n(m-n)} \ , \ y_1 = m - n \ , \ a = \frac{1}{2(n-m)} \ .$$

$$m = r + l \ , \ n = \sqrt{l(l+2r)} \ .$$

② $\angle P_1OR = \theta$ 라고 하면, (단위는 라디안)

곡선 P_1R의 길이 : $r\theta$, $\theta = COS^{-1}(\frac{m-n}{r}) = ARCCOS(\frac{m-n}{r})$, $r = \sqrt{m^2 - n^2}$

③ Q_1R의 길이 : $\int_0^{x_1} \sqrt{1 + \left(\frac{x}{n-m}\right)^2}\, dx$

$$= \frac{1}{m-n}\int_0^{x_1} \sqrt{(m-n)^2 + x^2}\, dx$$

$x = (m-n)\,TAN(k)$ 로 치환하면,

$dx = (m-n)\,SEC^2(k)\,dk$ 이고

$x = 0 \rightarrow k = 0$,

$$x = x_1 \rightarrow k = TAN^{-1}\left(\frac{x_1}{m-n}\right) = TAN^{-1}\left(\sqrt{\frac{2n}{m-n}}\right)$$

$$= ARCTAN\left(\sqrt{\frac{2n}{m-n}}\right) = k^{**}$$

따라서 Q_1R의 길이 : $(m-n)\int_0^{k^{**}} SEC^3(k)\ dk$

$$= (m-n)\left\{0.5\,TAN(k)\,SEC(k) + 0.5\int SEC(k)\,dk\right\}_0^{k^{**}}$$

$$= (m-n)\{0.5\,TAN(k^{**})\,SEC(k^{**}) + 0.5\,LOG(SEC(k^{**}) + TAN(k^{**}))\}$$

$TAN(k^{**}) = \sqrt{\frac{2n}{m-n}}$, $SEC(k^{**}) = \sqrt{\frac{m+n}{m-n}}$ 이므로,

Q_1R의 길이 : $(m-n)\int_0^{k^{**}} SEC^3(k)\ dk$

$$= \sqrt{\frac{n(m+n)}{2}} + \frac{(m-n)}{2}\,LOG\left(\frac{\sqrt{2n}+\sqrt{m+n}}{\sqrt{m-n}}\right)$$

Ⅲ.

위에서 언급된 내용들은 일정한 조건하에서만 성립가능하다.

① 가장 중요한 핵심변수는 $\angle P_1OR = \theta$ 이다.

θ로부터 r과 l의 범위를 직접 도출할 수 있으므로 x_1 , y_1 , a , m , n , k의 범위도 쉽게 유도할 수 있다.

$0 < 6\theta \le 2\pi$ 로부터 $0 < \theta \le \frac{\pi}{3}$. ------ⓐ

$$\longrightarrow \frac{1}{2} \le COS(\theta) < 1.$$

$$\longrightarrow \frac{1}{2} \le \frac{m-n}{r} < 1.$$

$\theta \ne 0$, $y_1 = m - n \ne 0$ 이므로,

$$\longrightarrow \frac{1}{2} \le \sqrt{\frac{m-n}{m+n}} < 1.$$

$m, n > 0$,

$$\longrightarrow 0 < n \le \frac{3}{5} m.$$

$$\longrightarrow 0 < \sqrt{l(l+2r)} \le \frac{3}{5}(r+l).$$

$$\therefore\ 0 < l \le \frac{r}{4}. \quad \text{--------ⓑ}$$

ⓐ로부터, $\therefore\ 0 < x_1 \le \frac{\sqrt{3}r}{2}$, $\frac{r}{2} \le y_1 < r$, $-\frac{1}{r} \le a < -\frac{1}{2r}$.

ⓑ로부터, $\therefore\ r < m \le \frac{5r}{4}$, $0 < n \le \frac{3r}{4}$.

$0 < x_1 \le \frac{\sqrt{3}r}{2}$, $y_1 = m - n$, $2a = -\frac{1}{y_1}$, $-\frac{1}{r} \le a < -\frac{1}{2r}$ 에서

$$\therefore\ 0 < k \le \frac{\pi}{3}.$$

② ①에서 언급된 내용들은 당면한 문제를 해결함에 있어 이론적 틀을 제공해 준다. 각 변수들은 위에서 제시된 범위를 벗어날 수 없다. 이를 바탕으로 아래에서는 물리적 및 제조공학적으로 합당한 각 변수들의 값을 도출한다. 문제의 핵심은 l의 값을 특정하는 방법이다. 다음에 제시되는 방법에 의하지 않고 임의의 값으로 특정가능하지만 ①에서 언급된 사항들을 위배할 수 없다.

접점 $R(x_1, y_1)$에서 운동방향은 접선의 기울기와 동일하다.

접선의 식 : $x_1 x + y_1 y = r^2$ 혹은 $y = -TAN(\theta)x + y_1 + \frac{x_1^2}{y_1}$.

물리적으로 곡선부분의 취지를 확보하기 위해서 접선의 y축 절편이 아래의 조건을 만족해야 한다. (R은 외경) 그리고 제조공학적 측면에서는 l이 클수록 간편할 것이다.

$$r+l < y_1 + \frac{{x_1}^2}{y_1} \le R$$

$$\longrightarrow \frac{r^2}{R} \le y_1 < \frac{r^2}{r+l}$$

$$\longrightarrow \frac{r^2}{R} \le m-n < \frac{r^2}{r+l}$$

$$\longrightarrow \frac{r^2}{R} \le r+l-\sqrt{l(l+2r)} < \frac{r^2}{r+l}$$

$$\longrightarrow \therefore\ 0 < l \le \frac{(R-r)^2}{2R}$$

$$\therefore\ l^* = \frac{(R-r)^2}{2R}$$

$$\therefore\ m^* = r + l^* = \frac{R^2+r^2}{2R}$$

$$\therefore\ n^* = \sqrt{l^*(l^*+2r)} = \frac{R^2-r^2}{2R}$$

$$\therefore\ y_1^* = m^* - n^* = \frac{r^2}{R}$$

$$\therefore\ x_1^* = \sqrt{2n^*(m^*-n^*)} = \frac{r}{R}\sqrt{R^2-r^2}$$

$$\therefore\ a^* = -\frac{1}{2y_1^*} = -\frac{R}{2r^2}$$

$$\therefore\ TAN(k^*) = TAN(\theta^*) = \frac{x_1^*}{y_1^*} = \frac{x_1^*}{m^*-n^*} = \sqrt{\left(\frac{R}{r}\right)^2-1}$$

$$\therefore\ k^* = \theta^* = ARCTAN\left(\sqrt{\left(\frac{R}{r}\right)^2-1}\right) = TAN^{-1}\left(\sqrt{\left(\frac{R}{r}\right)^2-1}\right)$$

** 곡선 P_1R의 길이 : $r\theta^*$

** Q_1R의 길이 : $\sqrt{\frac{n^*(m^*+n^*)}{2}} + \frac{(m^*-n^*)}{2} LOG\left(\frac{\sqrt{2n^*}+\sqrt{m^*+n^*}}{\sqrt{m^*-n^*}}\right)$

③ 지금까지의 내용들을 토대로 하여 두 가지 모델에 대한 성과치를 비교한다.
먼저 기존모델을 CIRCULAR, 신모델을 PARABOLIC이라고 칭한다.
두 모델의 차이점은 형태이며 기타 모든 물리적 조건은 동일하다고 가정한다.

ⓐ 1회전운동시 실제 접촉부분의 길이

CIRCULAR --- $2\pi r$,

PARABOLIC --- $MAX \sim 2\pi r - 6 \times (P_1R$ 의 길이 $- Q_1R$ 의 길이$)$

$MIN \sim 2\pi r - 6 \times P_1R$ 의 길이

ⓑ 회전주기

CIRCULAR --- $\frac{2\pi r}{v}$

PARABOLIC--- $MAX \sim \frac{2\pi r - 6 \times (P_1R \text{ 의 길이} - Q_1R \text{ 의 길이})}{v}$

$MIN \sim \frac{2\pi r - 6 \times P_1R \text{ 의 길이}}{v}$

모델 PARABOLIC의 경우 확률적 과정을 나타내고 있다. 일반적으로 경험적 자료가 불충분할 경우는 BETA분포, 삼각형(TRIANGULAR)분포, 일양(UNIFORM)분포를 사용한다. BETA분포, 삼각형(TRIANGULAR)분포를 이용할려면 추가적인 parameter가 필요하다. 현재의 경우 확률변수의 최대치와 최소치만 알고 있으므로 일양분포를 이용하는 것이 바람직하다. 일양분포를 이용할 경우의 대표값 평균과 분산은 각각 아래와 같다.

$$\text{평균} = \frac{\text{최대치} + \text{최소치}}{2}, \quad \text{분산} = \frac{(\text{최대치} - \text{최소치})^2}{12}$$

따라서 모델 PARABOLIC에 대한 두가지 성과치에 대한 대표값은 다음과 같이 계산된다.

ⓐ 1회전운동시 실제 접촉부분의 길이

$$\text{평균} = 2\pi r - 6 \times P_1R + 3Q_1R, \quad \text{분산} = 3(Q_1R)^2,$$

$$\text{변동계수} = \frac{\sqrt{3}\,Q_1R}{2\pi r - 6 \times P_1R + 3Q_1R}$$

ⓑ 회전주기

$$\text{평균} = \frac{2\pi r - 6\times P_1R + 3Q_1R}{v}\ ,\ \text{분산} = \frac{3(Q_1R)^2}{v^2}$$

$$\text{변동계수} = \frac{\sqrt{3}\,Q_1R}{2\pi r - 6\times P_1R + 3Q_1R}$$

Ⅳ.

다음은 computer를 이용한 수치해석 결과이다. ---- 사례

input 자료는 외경(R) = 1.5㎝ , 내경(r) = 1.2㎝ , v = 500㎝/second.

$0 < l \leq 0.03$, $l^* = 0.03$, $m^* = 1.23$

$n^* = 0.27$, $y_1^* = 0.96$, $x_1^* = 0.72$, $a^* = -0.52083333$

$k^* = \theta^* = 0.64350110$

곡선 P_1R의 길이 : 0.77220140

Q_1R의 길이 : 0.78271070

ⓐ 1회전운동시 실제 접촉부분의 길이(단위 : ㎝)

CIRCULAR --- 7.53982237

PARABOLIC --- 평균 = 5.25474700 , 분산 = 1.83790800 , 변동계수 = 0.25799430

ⓑ 회전주기(단위 : sec)

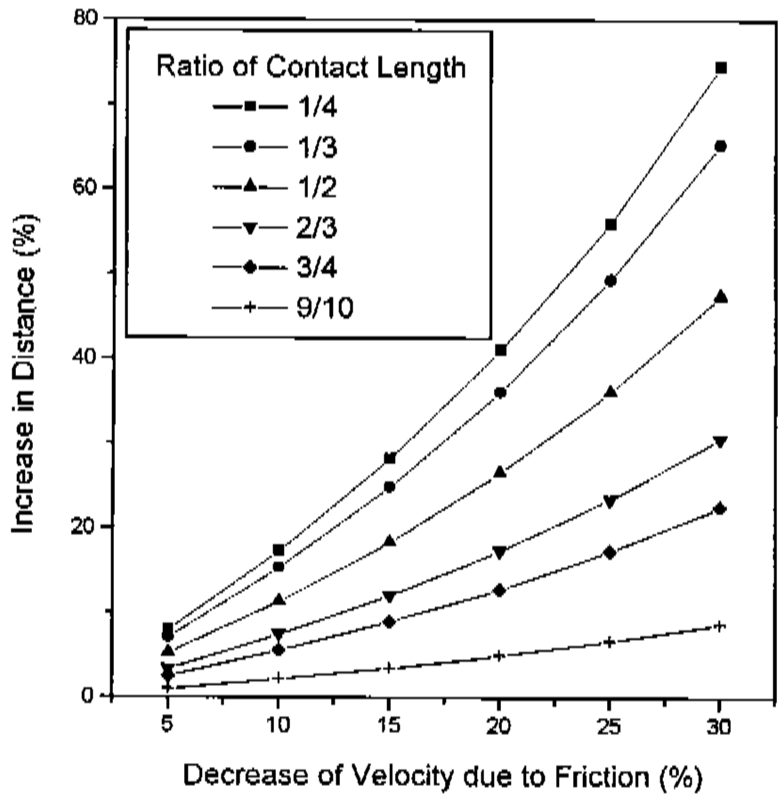
CIRCULAR --- 0.01507965 sec

PARABOLIC --- 평균 = 0.01050949 , 분산 = 0.00000735 , 변동계수 = 0.25799430

Ⅴ.

모델 PARABOLIC은 CIRCULAR에 비해서 1회전운동시 실제 접촉부분의 길이측면에서 최소 0.92938071, 최대 3.64077003 만큼 감소하였다. 그리고 회전주기면에서는 최소 0.00185907, 최대 0.00728125 만큼 감소하였다.

결국 모델 PARABOLIC은 최소 12.33% , 최대 48.29% 정도의 감소효과를 보여주고 있어 기존모델 CIRCULAR보다 우수하다고 할 수 있다.



Ratio of Contact Length
1/4
1/3
1/2
2/3
3/4
9/10
Increase in Distance (%)
Decrease of Velocity due to Friction (%)
0
20
40
60
80
5
10
15
20
25
30